

矩阵与递推

blue

斐波那契数列

已知：

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$$

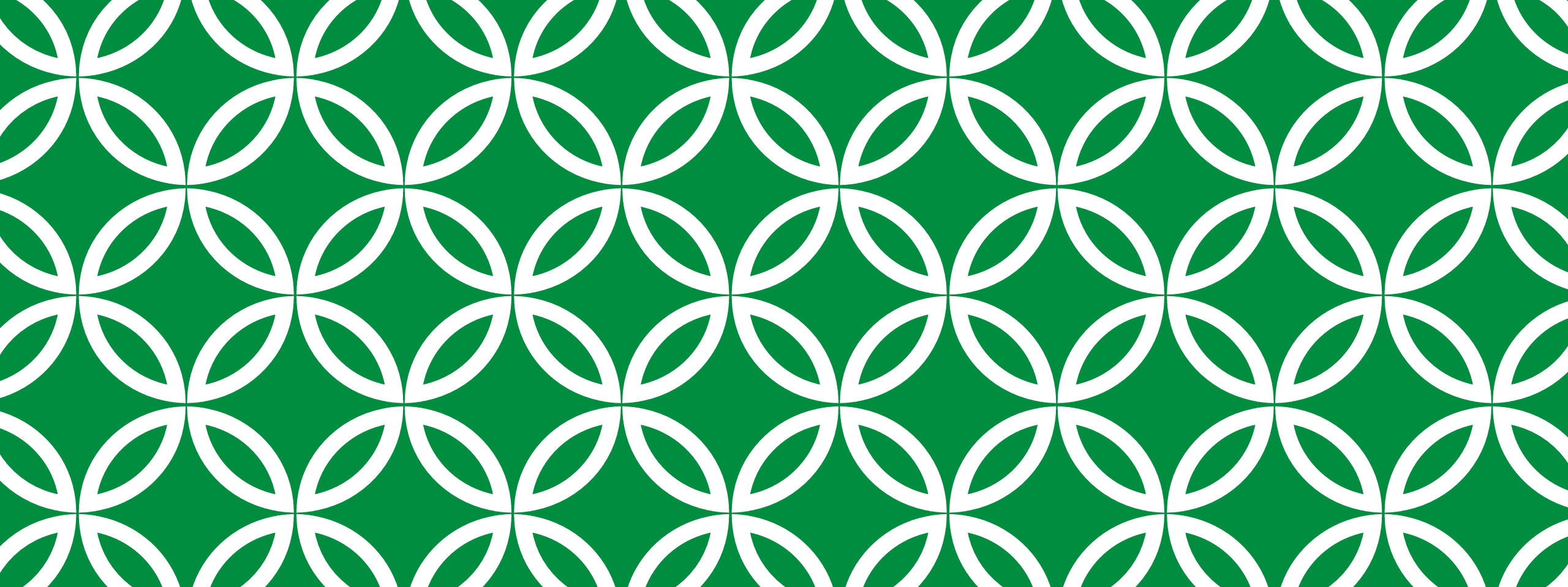
求 a_n 。

问题

有一些递推数列，很难推出通项公式。往往以 $O(n)$ 的时间复杂度来硬算。

但是，如果只询问某个项的值，线性时间的算法将会浪费大量时间。

有没有优化的办法，让它只占用 $O(\log n)$ 的时间复杂度？



群

数学基础

群的定义

集合 G 和在 G 上的二元运算 \otimes ，且具有：

1. 封闭性 $a \otimes b$ 一定在 G 内.
2. 结合律 $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$.
3. 单位元 G 内存在 e ，使得 $a \otimes e = e \otimes a = a$.
4. 逆元 对于每一个 a ，存在 b ，使得 $a \otimes b = b \otimes a = e$.

则称 (G, \otimes) 是一个群。

几个例子

请回答：

1. 指出 (\mathbb{Z}, \times) 的单位元和 a 的逆元。

单位元： 1 逆元： $\frac{1}{a}$

2. 指出 $(\mathbb{Z}, -)$ 的单位元和 a 的逆元。

不是群，因为不满足结合律。 $(a - b) - c \neq a - (b - c)$

有用的性质

凡是乘法意义下的群都可以快速幂。

想一想，为什么？

因为满足结合律。

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$$

矩阵群

对于矩阵 M 和矩阵乘法 \times ， (M, \times) 是一个群。

单位元：
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

逆元：逆矩阵 M^{-1}

关于单位元

N阶矩阵的单位元是N阶单位矩阵。

单位矩阵：对角线是1，其余以0填充。

容易发现，对应的单位矩阵乘以矩阵，总是得到原矩阵。

$$\begin{array}{l} \text{1阶: } 1 \\ \text{2阶: } \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \\ \text{3阶: } \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \end{array}$$

矩阵快速幂

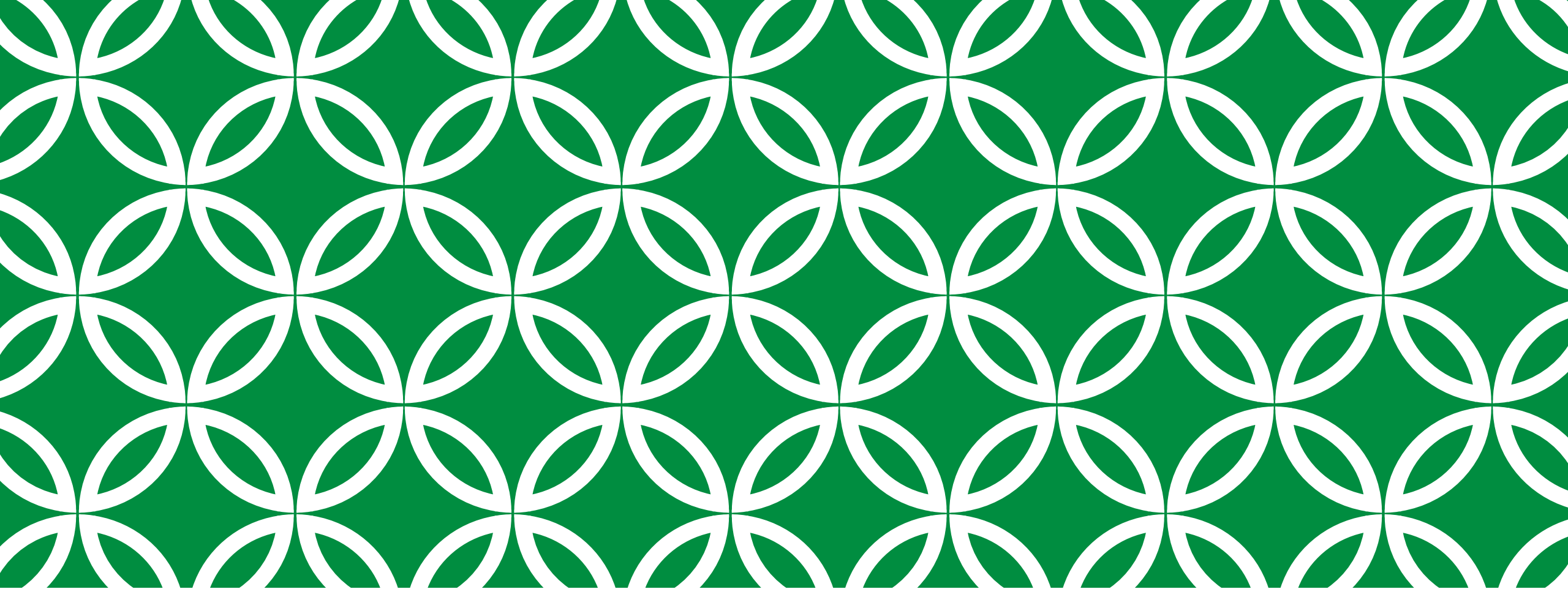
刚刚说过，凡是乘法运算群都可以快速幂。
矩阵也一样。

代码？和平常的快速幂一样写，重载一下乘号。

加速

学会了矩阵的快速幂，我们不由开始想……

能不能用矩阵乘法的快速幂，来加速递推？



递推矩阵

加速递推的工具

斐波那契数列

回到最初的问题。如何构造斐波那契数列的加速？

提示：构造

$$[F_n \quad F_{n-1}] \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [F_{n+1} \quad F_n]$$

解决

设置初始矩阵 $[F_2 \quad F_1]$ 。那么：

$$[F_n \quad F_{n-1}] = [F_2 \quad F_1] \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1}$$

顺利完成 $O(\log n)$ 复杂度的求斐波那契数。

另一种

更好看的版本：

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

忘记怎么推出来的了……

汉诺塔问题

令 H_n 为解 n 层汉诺塔所需要的移动次数。已知：

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

试构造矩阵加速递推。

（虽然我知道你们能推出通项公式QAQ）

思路

看黑板。

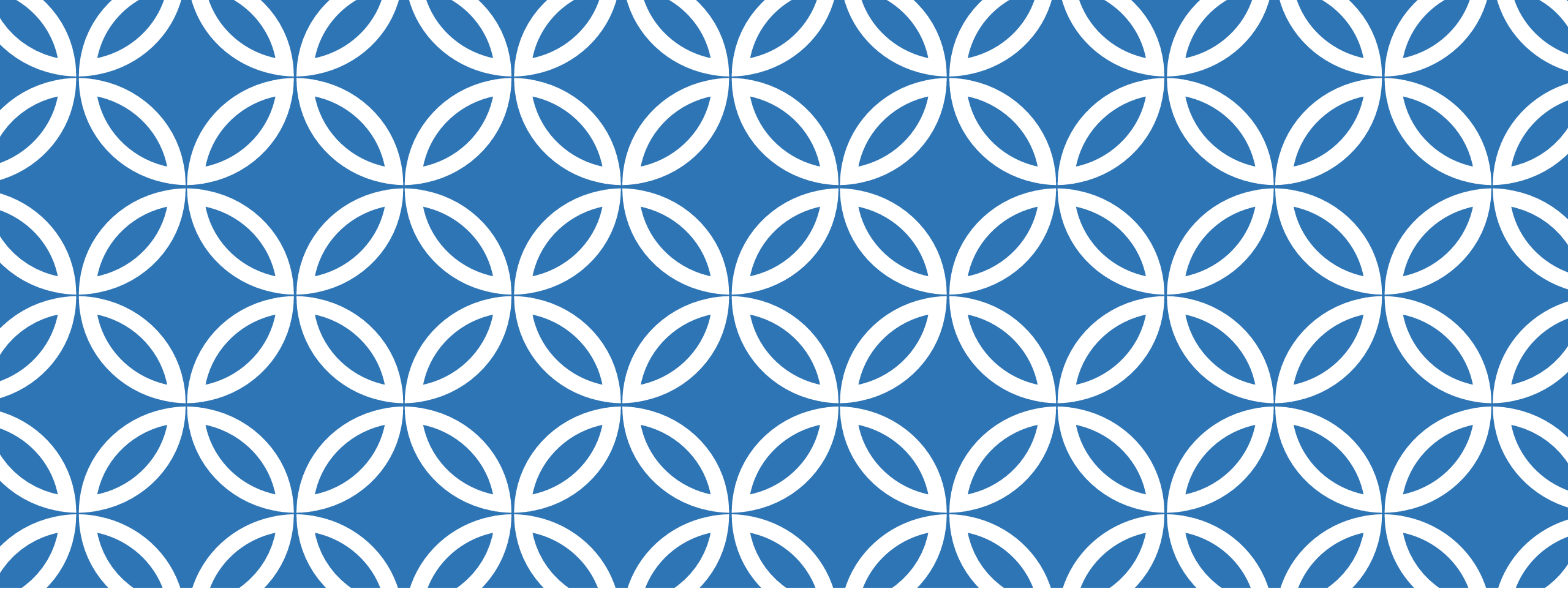
$$[H_n \quad 1] \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [H_{n+1} \quad 1]$$

总结

看到递推而且只需要推一个项的题目，可以考虑这样做：

1. 先求出递推公式，尝试求出容易计算的通项。
2. 如果没办法求出容易计算的通项，就构造矩阵加速。

如何构造矩阵？好的构造 = 经验 + 数学直觉。



END

blue