

数学归纳法

blue

例题

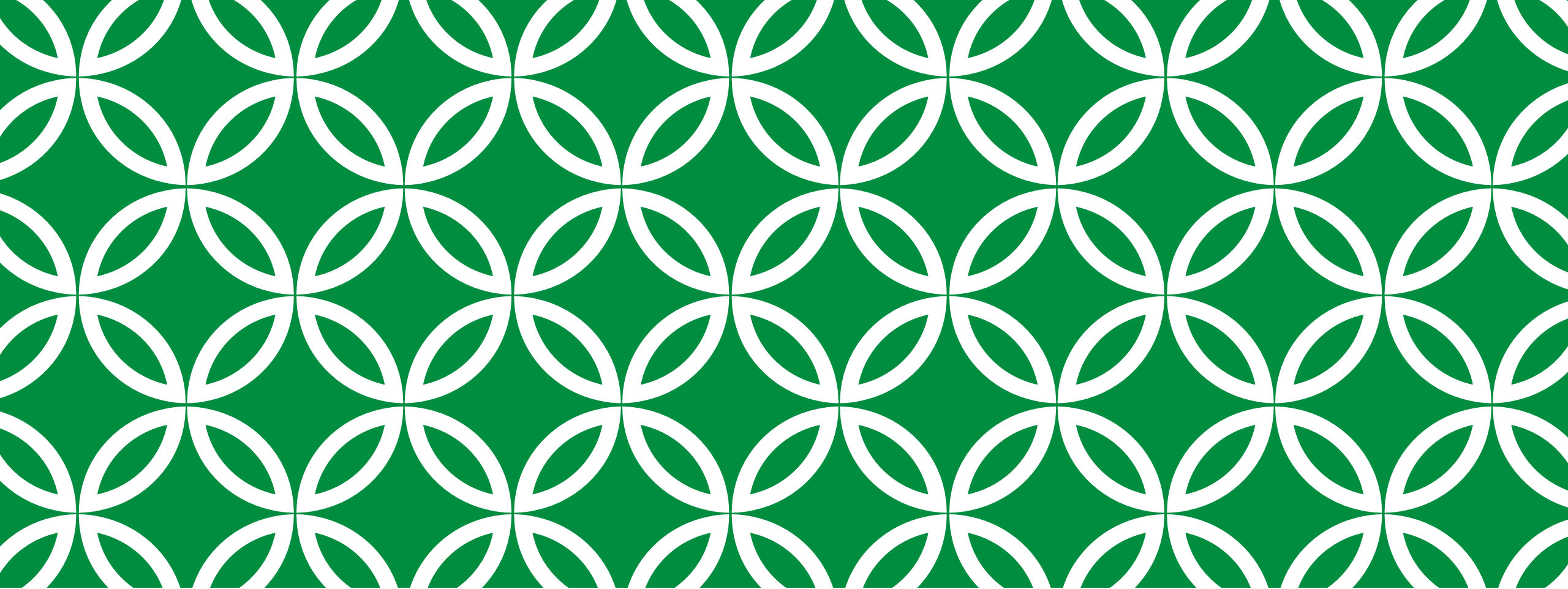
试证明：

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

用途

有时我们会遇到一些需要证明的东西。

如果我们只需要证明命题对正整数成立，那么有一种通杀的办法：数学归纳法。



数学归纳法

基本证明方法

思想

我们有命题 $P(n)$ ，需要证明对正整数 n 成立。

Step1. 证明 $P(1)$ 成立。

Step2. 证明如果 $P(k)$ 成立，那么 $P(k + 1)$ 也成立。

Step3. 综合1、2， $P(n)$ 对 $n \in Z_+$ 成立。 ■

例子

Step1. 证明P(1)成立:

$$\sum_{i=1}^1 i^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

故P(1)成立。

Step2. 证明如果P(k)成立，那么P(k + 1)也成立。

提示：

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^k i^2 + (k + 1)^2$$

汉诺塔问题

矩阵加速递推的过程中，我们知道这样一个式子：

$$a_i = 2a_{i-1} + 1$$

打表见：

1 3 7 15 31

我们猜想： $a_i = 2^i - 1$.

尝试

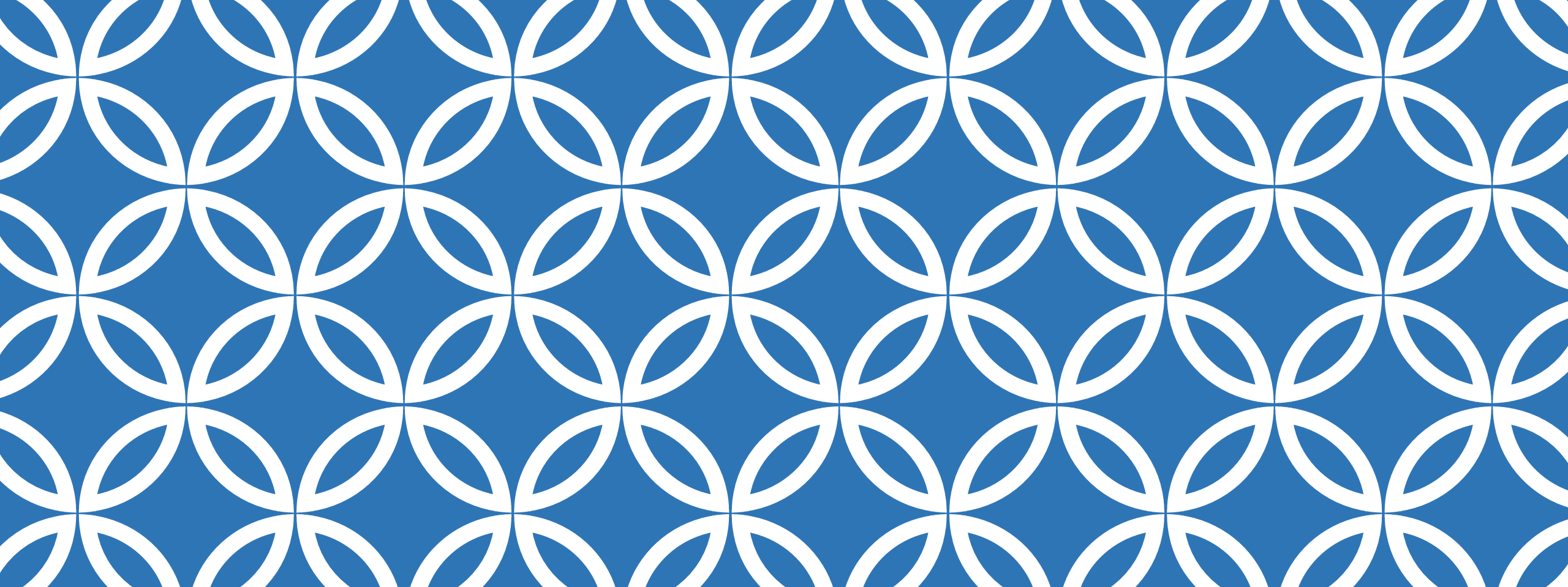
请尝试证明： $a_i = 2a_{i-1} + 1 \quad \rightarrow \quad a_i = 2^i - 1$

思考题

取石子游戏：两人轮流取石子，最后到达某种情况结束。

取石子游戏必定存在先手必不败或后手必不败策略。

尝试用数学归纳法证明。



END

blue